単磁極とファイバー束(ゲージ理論における幾可学の応用)

著者	本田 守広
号	601
発行年	1979
URL	http://hdl.handle.net/10097/24162

氏名・(本籍)	本田守広（ほんだ もりひろ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理博第 601 号
学位授与年月日	昭和54年3月27日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
研究科専攻	東北大学大学院理学研究科 (博士課程) 原子核理学専攻
学位論文題目	単磁極とファイバー束(ゲージ理論における幾何学の応用)
論文審査委員	(主査) 教授 佐藤岩男　教授 武田 暁 助教授 秋葉巴也

論文目次

0章 序論

1章 ファイバー束としての単磁極

2章 単磁極解

3章 ファイバー束としての単磁極解

4章 一般の Lie 群をゲージ群にもつ Higgs 模型における単磁極解

5章 「大」統一模型における単磁極解

6章 終論

付録 A ファイバー束要約

B ホモトピー論要約

論　文　内　容　要　旨

0　序　　論

P. A. M. Dirac は Maxwell 方程式を電場と磁場に対して対称にとりあつかおうとするとき（電荷に対して単独の磁荷≒単磁極を導入する），ベクトルポテンシャルに線状の特異性が表われる事を示した。この特異線が物理的なものでないと要請すると，磁荷 g は量子化され

$$\frac{1}{hc} g \cdot e = \frac{n}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

をみたす。この論文では Y. Aharonov － D. Bohm の議論を用いて磁荷の量子化を再現する。

1.　ファイバー束としての単磁極

単磁極のベクトルポテンシャルを具体的に下の２通りに書く。

a．$A_0 = A_r = A_\theta = 0$　　　　b．$A_0 = A_r = A_\theta = 0$

$$A_\varphi = \frac{1-\cos\theta}{2r\sin\theta} g \qquad\qquad A_\varphi = \frac{-1-\cos\theta}{2r\sin\theta} g \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

共に $\vec{H} = \dfrac{\vec{r}}{r^3} g$ を与えるが a は xy 平面の下側に特異性をもち，b は上側に物異性をもつ。T. T. Wu と C. N. Yang は g が(1)をみたす時，xy 平面の上側では a，下側では b を用い，$a \to b$（$b \to a$）の時，$\exp\left\{\begin{matrix}- \\ (+)\end{matrix} i \dfrac{2ge}{hc} \varphi\right\}$ だけ波動関数の位相を変化させれば矛盾なく電磁場の中の荷電粒子の動きを記述できる事を示した。

さらに，一般にゲージ理論がファイバー束とみなせる事は良く知られているが，彼らは特に，単磁極は自明でないファイバー束に対応する事を示した。

2.　単磁極解

一方 't Hooft と Polyakov は Higgs 機構によって U(1)対称性まで対称性のやぶれる SO(3)ゲージ理論において単磁極とみなせる特異性のない解が存在する事を示した。その Lagraugian を

$$L = -\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}D_\mu\vec{\Phi}\cdot D_\mu\vec{\Phi} - \frac{1}{8}(\vec{\Phi}\cdot\vec{\Phi} - 1)^2$$

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{A}_\nu - \partial_\nu\vec{A}_\mu + e\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu$$

$$D_\mu\vec{\Phi} = \partial_\mu\vec{\Phi} + e\vec{A}_\mu\times\vec{\Phi}, \quad (h = c = 1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

とおくとき，十分大きな球面上で $|\vec{\Phi}| = 1$ とおくと，この解は，

$$e\vec{A}_\mu = \vec{\Phi}\times\partial_\mu\vec{\Phi} + a_\mu\vec{\Phi}$$

$$e\vec{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu\vec{\phi}\times\partial_\nu\vec{\phi}+\vec{\phi}\cdot(\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu)\quad\cdots\cdots(4)$$

これからU(1)ゲージ場テンソルは

$$f_{\mu\nu}=\vec{\phi}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{e}\left\{\vec{\phi}\cdot[\partial_\mu\vec{\phi}\times\partial_\nu\vec{\phi}]+\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

と与えられる。特にϕ場を

$$\vec{\phi}=(\sin\xi\cos\zeta,\ \sin\xi\sin\zeta,\ \cos\xi),\quad \zeta=\zeta(\theta,\varphi),\quad \zeta=\zeta(\theta,\varphi)\quad\cdots\cdots(6)$$

とおく。この球面上で磁場を積分すると,

$$\int\vec{H}\,d\vec{s}=\frac{1}{2}\int f_{\mu\nu}\,ds^{\mu\nu}=\frac{1}{e}\int\sin\xi\,d\xi d\zeta=\frac{4\pi}{e}\cdot n\quad\cdots\cdots(7)$$

このnは$\phi:\ s^2\to s^2((\theta,\varphi)\to(\xi,\zeta))$のホモトピー類を示し，ホモトピー類{ n }によって，磁荷gが

$$ge=n\quad\cdots\cdots(8)$$

と与えられるのがわかる（荒船，その他）。

3. ファイバー束としての単磁極解

'tHooft－Polyakov 単磁極解をファイバーとして $|\vec{\phi}|=1$ のHiggs場をもつ（十分大きな）球面上の束とみるとき（構造群はSO(3)），$\phi(\theta,\varphi)$を断面とみなす事ができ，断面の存在からこれは自明な束となる。すなわちSO(3)束とみなす時，すべて同値な束となりWu－Yang の解析と矛盾する。

しかし，Higgs 機構により残されるU(1)による束と考える時にはかならずしも自明な束とはならない。その特性類とϕのホモトピー類との関係は

$$0\to\pi_2(S^2)\to\pi_1(U(1))\to\pi_1(SO(3))\to0\quad\cdots\cdots(9)$$

によって与えられ，ϕのホモトピー類に対応する特性類は，1：2の関係にある事がわかり，量子化条件

$$g\cdot e=\frac{1}{2}\cdot2n=n\quad\cdots\cdots(10)$$

と荒船達の結果を再現する。

4. 一般のLie群をゲージ群にもつHiggs模型における単磁極解

GゲージHiggs 模型を考える。Higgs 機構によってGゲージ群がHゲージ群にまで破れる時，$g:s^2\to G$が$g(\theta,\varphi)$，$g(\pi,\varphi)=a\cdot\exp\{i\Lambda\varphi\}(\equiv g(\varphi))$と書けるものを選ぶ（$a\in G$，$\Lambda$は$H$の生成元）。この時の真空期待値の1つを$\phi_0$とすると

$$\phi(\theta,\varphi)=g(\theta,\varphi)\cdot\varphi_0\quad\cdots\cdots(11)$$

$$\begin{cases} A_0 = A_r = 0 \\ A_0 = \dfrac{i}{re} g(\theta, \varphi) \partial_\theta g^{-1}(\theta, \varphi) \\ A_\varphi = i \dfrac{(1-\cos\theta)}{2er\sin\theta} g(\theta, \varphi)(g^{-1}(\varphi)\partial_\varphi g(\varphi)) g^{-1}(\theta, \varphi) \end{cases}$$

$$+ \frac{i}{er\sin\theta} g(\theta, \varphi)\partial_\varphi g^{-1}(\theta, \varphi) \cdots\cdots (12)$$

は$g(\varphi)$が1価的（$\exp(i2\pi A)=1$）ならば無限遠での解になっている事が示される。これは(11)が定値写像にホモトープでなければ，ファイバー束としての構造をもち，Hゲージ理論 としては

$$A_0 = A_r = A_\theta = 0$$

$$A_\varphi = \frac{1-\cos\theta}{2er\sin\theta} A \qquad \cdots\cdots (13)$$

となり，単磁極的にふるまう。また無限遠での解が存在する事は，有限の所でもなめらかな解の存在を示唆する。

5. 「大」統一模型での単磁極解

特にSU(5)「大」統一模型について述べる。

この時には，随伴表現に従うHiggs 場と5次元表現に従うHiggs 場を導入してSU(5)を$SU(3)_S \times U(1)_{EM}$まで破るわけである。この時残される$SU(3)_S \times U(1)_{EM}$の生成元を行列で書くと

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \text{SU(3)の生成元} & \\ & \end{matrix}} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots (14)$$

となる。このとき，$g: s^2 \to SU(5)$を$g(\theta, \varphi)$と書くと$g(\pi, \varphi) = a \cdot \exp\{i3Q\varphi\}$，$a \in SU(5)$ となるものが存在し，4章の議論よりSU(5)理論の結合定数をeとすると

$$g \cdot e = 3/2 \qquad \cdots\cdots (15)$$

をみたす磁荷gをもつ単磁極の存在が示唆される。

6. ……… 略

論文審査の結果の概要

素粒子の相互作用が強，弱，電磁いずれも，ゲージ場理論によって記述されると信ずべき理由が，最近ますます強くなって来ると共に，この理論のいろいろな古典解が見出され，これら古典解の存在と性質をしらべる事が重要な問題となって来た。本田守広は，Higgs 場を含むゲージ場理論において，単磁極をあらわす古典解をファイバー束としてとらえ，これによって如何なる単磁極解が存在し得るかをしらべ，またかなり一般的に漸近解を見出す方法を与えた。論文前半で既知の単磁極解の解説を行なったのち，第3章で，単磁極解におけるHiggs 場の振舞いが，球面 S^2 から等質空間 G/H への連結写像 ϕ を与える事に着目し，S^2 から G への1点を除いて連続な写像 g が存在するという事実を使って，積束 $S^2\times G$ から縮約して得られる自明ならざる主束 P（S^2，H）で以て単磁極解を代表させた。ここに G はゲージ群，H は，Higgs 場の零ならざる真空期待値によって G が自発的に破れた後に残る G の部分群である。更に束のホモトピー系列の性質を利用して，G のいろいろな場合に対して，上のようにして得られた主束の特性類が，基本群 $\pi_1(H)$ の如何なる部分に属するかをしらべた。特に $\pi_1(G)\cong 0$ の場合は，$\pi_1(H)$ は ϕ のホモトピー類の属する π_2（G/H）と同型になり，'t Hooft，Polyakov の単磁極解の荒船等による分類が，特性類による分類と一致する事を示した。第4章では，上のようにして得られる主束の接続の係数としてのゲージ場が，特性写像を H の $U(1)$ 部分群にとることによって，場の方程式の解となる事を示し，かなり一般的にこの解を求める処方を与えている。またこれによって単磁極の磁荷が量子化される事が示されている。第5章では以上の一般論を素粒子の強，弱，電磁相互作用を統一するいわゆる大統一模型に適用する。この場合は，G は $SU(5)$，H は $SU(3)\times U(1)$ であって，G を H にまで自発的に破るには，2つのHiggs 場を導入しなければならないが，一般論は殆んどそのまま適用できる事が示される。物理的に最も興味があるのは，H に含まれる $SU(3)$ に対して不変な単磁極解であるが，これに対して上記の写像 g を具体的に作って漸近解を求め，磁荷が（3／2）（n/e）となる事を示している。以上の諸結果は，この方面の研究に興味ある新知見を加えるものであって，著者が自立して研究活動を行なうに必要な高度の研究能力と学識を有する事を示している。よって本田守広提出の論文は理学博士の学位論文として合格と認める。

氏名・(本籍)	本田守広(ほんだもりひろ)
学位の種類	理学博士
学位記番号	理博第 601 号
学位授与年月日	昭和54年3月27日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
研究科専攻	東北大学大学院理学研究科 (博士課程) 原子核理学専攻
学位論文題目	単磁極とファイバー束(ゲージ理論における幾何学の応用)
論文審査委員	(主査) 教授 佐藤岩男 教授 武田暁 助教授 秋葉巴也

論文目次

0章 序論

1章 ファイバー束としての単磁極

2章 単磁極解

3章 ファイバー束としての単磁極解

4章 一般のLie群をゲージ群にもつ
Higgs模型における単磁極解

5章 「大」統一模型における単磁極解

6章 終論

付録 A ファイバー束要約

B ホモトピー論要約

論　文　内　容　要　旨

0　序　　論

P. A. M. Dirac は Maxwell 方程式を電場と磁場に対して対称にとりあつかおうとするとき（電荷に対して単独の磁荷≒単磁極を導入する），ベクトルポテンシャルに線状の特異性が表われる事を示した。この特異線が物理的なものでないと要請すると，磁荷 g は量子化され

$$\frac{1}{hc} g \cdot e = \frac{n}{2} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

をみたす。この論文では Y. Aharonov − D. Bohm の議論を用いて磁荷の量子化を再現する。

1.　ファイバー束としての単磁極

単磁極のベクトルポテンシャルを具体的に下の２通りに書く。

a． $A_o = A_r = A_\theta = 0$　　　b． $A_o = A_r = A_\theta = 0$

$$A_\varphi = \frac{1-\cos\theta}{2r\sin\theta} g \qquad A_\varphi = \frac{-1-\cos\theta}{2r\sin\theta} g \quad \cdots\cdots (2)$$

共に $\vec{H} = \frac{\vec{r}}{r^3} g$ を与えるが a は xy 平面の下側に特異性をもち，b は上側に物異性をもつ。T. T. Wu と C. N.　Yang は g が(1)をみたす時，xy 平面の上側では a，下側では b を用い，$a \to b$（$b \to a$）の時，$\exp\left\{ {}^{-}_{(+)} i \frac{2ge}{hc} \varphi \right\}$ だけ波動関数の位相を変化させれば矛盾なく電磁場の中の荷電粒子の動きを記述できる事を示した。

さらに，一般にゲージ理論がファイバー束とみなせる事は良く知られているが，彼らは特に，単磁極は自明でないファイバー束に対応する事を示した。

2.　単磁極解

一方 't Hooft と Polyakov は Higgs 機構によってU(1)対称性まで対称性のやぶれる SO(3)ゲージ理論において単磁極とみなせる特異性のない解が存在する事を示した。その Lagraugian を

$$L = -\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}D_\mu\vec{\Phi}\cdot D_\mu\vec{\Phi} - \frac{1}{8}(\vec{\Phi}\cdot\vec{\Phi} - 1)^2$$

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{A}_\nu - \partial_\nu\vec{A}_\mu + e\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu$$

$$D_\mu\vec{\Phi} = \partial_\mu\vec{\Phi} + e\vec{A}_\mu \times \vec{\Phi}, \quad (h = c = 1) \cdots\cdots\cdots (3)$$

とおくとき，十分大きな球面上で $|\vec{\Phi}| = 1$ とおくと，この解は，

$$e\vec{A}_\mu = \vec{\Phi} \times \partial_\mu\vec{\Phi} + a_\mu\vec{\Phi}$$

$$e\vec{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu\vec{\phi}\times\partial_\nu\vec{\phi}+\vec{\phi}\cdot(\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu) \quad \cdots\cdots(4)$$

これからU(1)ゲージ場テンソルは

$$f_{\mu\nu}=\vec{\phi}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{e}\left\{\vec{\phi}\cdot[\partial_\mu\vec{\phi}\times\partial_\nu\vec{\phi}]+\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu\right\} \quad \cdots\cdots(5)$$

と与えられる。特にϕ場を

$$\vec{\phi}=(\sin\xi\cos\zeta,\ \sin\xi\sin\zeta,\ \cos\xi),\quad \zeta=\zeta(\theta,\varphi),\quad \zeta=\zeta(\theta,\varphi) \cdots\cdots(6)$$

とおく。この球面上で磁場を積分すると,

$$\int\vec{H}\,d\vec{s}=\frac{1}{2}\int f_{\mu\nu}\,ds^{\mu\nu}=\frac{1}{e}\int\sin\xi\,d\xi\,d\zeta=\frac{4\pi}{e}\cdot n \quad \cdots\cdots(7)$$

このnは$\phi:\ s^2\to s^2((\theta,\varphi)\to(\xi,\zeta))$のホモトピー類を示し，ホモトピー類$\{n\}$によって，磁荷$g$が

$$ge=n \quad \cdots\cdots(8)$$

と与えられるのがわかる（荒船，その他）。

3. ファイバー束としての単磁極解

'tHooft－Polyakov 単磁極解をファイバーとして $|\vec{\phi}|=1$ の Higgs場をもつ（十分大きな）球面上の束とみるとき（構造群はSO(3)），$\phi(\theta,\varphi)$を断面とみなす事ができ，断面の存在からこれは自明な束となる。すなわちSO(3)束とみなす時，すべて同値な束となりWu－Yang の解析と矛盾する。

しかし，Higgs 機構により残されるU(1)による束と考える時にはかならずしも自明な束とはならない。その特性類とϕのホモトピー類との関係は

$$0\to\pi_2(S^2)\to\pi_1(U(1))\to\pi_1(SO(3))\to 0 \quad \cdots\cdots(9)$$

によって与えられ，ϕのホモトピー類に対応する特性類は，1：2の関係にある事がわかり，量子化条件

$$g\cdot e=\frac{1}{2}\cdot 2n=n \quad \cdots\cdots(10)$$

と荒船達の結果を再現する。

4. 一般の Lie群をゲージ群にもつ Higgs模型における単磁極解

Gゲージ Higgs 模型を考える。Higgs 機構によってGゲージ群がHゲージ群にまで破れる時，$g:s^2\to G$が$g(\theta,\varphi)$，$g(\pi,\varphi)=a\cdot\exp\{i\Lambda\varphi\}(\equiv g(\varphi))$と書けるものを選ぶ（$a\in G$，$\Lambda$は$H$の生成元）。この時の真空期待値の1つを$\phi_0$とすると

$$\phi(\theta,\varphi)=g(\theta,\varphi)\cdot\varphi_0 \quad \cdots\cdots(11)$$

$$\begin{cases} A_0 = A_r = 0 \\ A_0 = \dfrac{i}{re} g(\theta, \varphi)\partial_\theta g^{-1}(\theta, \varphi) \\ A_\varphi = i\dfrac{(1-\cos\theta)}{2er\sin\theta} g(\theta, \varphi)(g^{-1}(\varphi)\partial_\varphi g(\varphi)) g^{-1}(\theta, \varphi) \end{cases}$$

$$+\frac{i}{er\sin\theta} g(\theta, \varphi)\partial_\varphi g^{-1}(\theta, \varphi) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

は$g(\varphi)$が1価的（$\exp(i2\pi A)=1$）ならば無限遠での解になっている事が示される。これは(11)が定値写像にホモトープでなければ，ファイバー束としての構造をもち，Hゲージ理論 としては

$$A_0 = A_r = A_\theta = 0$$

$$A_\varphi = \frac{1-\cos\theta}{2er\sin\theta} A \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

となり，単磁極的にふるまう。また無限遠での解が存在する事は，有限の所でもなめらかな解の存在を示唆する。

5. 「大」統一模型での単磁極解

特にSU(5)「大」統一模型について述べる。

この時には，随伴表現に従うHiggs 場と5次元表現に従うHiggs 場を導入してSU(5)を$SU(3)_S \times U(1)_{EM}$まで破るわけである。この時残される$SU(3)_S \times U(1)_{EM}$の生成元を行列で書くと

$$\begin{bmatrix} \boxed{\text{SU(3)の生成元}} & \\ & \begin{matrix} 0 & \\ & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

となる。このとき，$g : s^2 \to SU(5)$を$g(\theta, \varphi)$と書くと$g(\pi, \varphi) = a \cdot \exp\{i3Q\varphi\}$，$a \in SU(5)$ となるものが存在し，4章の議論よりSU(5)理論の結合定数をeとすると

$$g \cdot e = 3/2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

をみたす磁荷gをもつ単磁極の存在が示唆される。

6. ……… 略

論文審査の結果の概要

素粒子の相互作用が強，弱，電磁いずれも，ゲージ場理論によって記述されると信ずべき理由が，最近ますます強くなって来ると共に，この理論のいろいろな古典解が見出され，これら古典解の存在と性質をしらべる事が重要な問題となって来た。本田守広は，Higgs 場を含むゲージ場理論において，単磁極をあらわす古典解をファイバー束としてとらえ，これによって如何なる単磁極解が存在し得るかをしらべ，またかなり一般的に漸近解を見出す方法を与えた。論文前半で既知の単磁極解の解説を行なったのち，第3章で，単磁極解におけるHiggs 場の振舞いが，球面 S^2 から等質空間 G/H への連結写像 ϕ を与える事に着目し，S^2 から G への1点を除いて連続な写像 g が存在するという事実を使って，積束 $S^2\times G$ から縮約して得られる自明ならざる主束 $P(S^2, H)$ で以て単磁極解を代表させた。ここに G はゲージ群，H は，Higgs 場の零ならざる真空期待値によって G が自発的に破れた後に残る G の部分群である。更に束のホモトピー系列の性質を利用して，G のいろいろな場合に対して，上のようにして得られた主束の特性類が，基本群 $\pi_1(H)$ の如何なる部分に属するかをしらべた。特に $\pi_1(G)\cong 0$ の場合は，$\pi_1(H)$ は ϕ のホモトピー類の属する $\pi_2(G/H)$ と同型になり，'t Hooft，Polyakov の単磁極解の荒船等による分類が，特性類による分類と一致する事を示した。第4章では，上のようにして得られる主束の接続の係数としてのゲージ場が，特性写像を H の $U(1)$ 部分群にとることによって，場の方程式の解となる事を示し，かなり一般的にこの解を求める処方を与えている。またこれによって単磁極の磁荷が量子化される事が示されている。第5章では以上の一般論を素粒子の強，弱，電磁相互作用を統一するいわゆる大統一模型に適用する。この場合は，G は $SU(5)$，H は $SU(3)\times U(1)$ であって，G を H にまで自発的に破るには，2つのHiggs 場を導入しなければならないが，一般論は殆んどそのまま適用できる事が示される。物理的に最も興味があるのは，H に含まれる $SU(3)$ に対して不変な単磁極解であるが，これに対して上記の写像 g を具体的に作って漸近解を求め，磁荷が $(3/2)(n/e)$ となる事を示している。以上の諸結果は，この方面の研究に興味ある新知見を加えるものであって，著者が自立して研究活動を行なうに必要な高度の研究能力と学識を有する事を示している。よって本田守広提出の論文は理学博士の学位論文として合格と認める。